TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGÂN HÀNG TPHCM
KỲ THI TUYỂN SINH CAO HỌC – NĂM 2014 (đợt 1)
Đáp án tham khảo môn: TOÁN

I. Phần Xác suất: (2,5 điểm)

Câu 1. Một phòng giao dịch của ngân hàng H có 15 nhân viên, trong đó có 6 nhân viên giỏi Anh văn, 9 nhân viên giỏi vi tính và 4 nhân viên giỏi cả Anh văn và vi tính. Giám đốc ngân hàng H chia ngẫu nhiên 15 người của phòng giao dịch này thành 3 nhóm, mỗi nhóm 5 người. Tính xác suất có ít nhất một nhóm không có người nào giỏi Anh văn.

Giải.

Gọi A là biến cố có ít nhất một nhóm không có người nào giỏi Anh văn.

Do có 9 nhân viên không giỏi Anh văn, nên A tương đương với biến cố có 1 nhóm không có người nào giỏi Anh văn. Từ đó ta được

$$P(A) = \frac{3.C_9^5.C_{10}^5}{C_{15}^5 C_{10}^5} = \frac{18}{143} \approx 0,1259 .$$

Câu 2. Ngân hàng M có 3 loại thẻ tín dụng I, II, III. Mỗi khách hàng của ngân hàng M chỉ sử dụng một loại thẻ tín dụng và xác suất sử dụng thẻ tín dụng I, II, III tương ứng là 0,28; 0,39; 0,33. Tính xác suất trong 10 khách hàng của ngân hàng này có 3 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng I, 2 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng II và 5 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng III.

Giải.

Gọi A là biến cố trong 10 khách hàng của ngân hàng này có 3 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng I, 2 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng II và 5 khách hàng sử dụng thẻ tín dụng III.

Ta có

$$P(A) = C_{10}^3 C_7^2 .0,28^3 .0,39^2 .0,33^5 \approx 0,0329 .$$

Câu 3. Thời gian hoạt động (tuổi thọ) của một máy do công ty A sản xuất là biến ngẫu nhiên X (đơn vị: năm) có phân phối chuẩn N(10;4). Tỉ lệ sản phẩm của công ty A phải bảo hành là 5%. Tính thời gian bảo hành sản phẩm của công ty A.

Giải.

Gọi t là thời gian bảo hành sản phẩm của công ty A đối với loại máy trên.

Theo giả thiết, ta có

$$P(X<t)=5\% \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{t-10}{2}\right)+0,5=0,05 \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{t-10}{2}\right)=-0,45 \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{t-10}{2}\right)=-\varphi(1,65)$$

$$\Leftrightarrow \varphi\left(\frac{t-10}{2}\right)=\varphi(-1,65) \Leftrightarrow \frac{t-10}{2}=-1,65 \Leftrightarrow t=-1,65.2+10=6,7 \text{ (năm).}$$

Câu 4. Một trạm cho thuê xe hàng ngày phải nộp thuế 165.000 đồng cho mỗi xe và mỗi xe được cho thuê với giá 450.000 đồng. Tính số tiền lời trung bình thu được trong một ngày của trạm này, biết số yêu cầu thuê xe của trạm này trong một ngày có phân phối Poisson với tham số $\lambda=4$ và trạm này có 4 xe.

Giải.

Gọi X là số yêu cầu thuê xe của trạm này trong một ngày $\Rightarrow X \sim P(4)$.
Gọi Y là số tiền lời thu được của trạm xe trong một ngày (đơn vị: ngàn đồng).
Ta có

X	Y	Xác suất
X=0	$-165.4=-660$	$p_0=e^{-4}.\frac{4^0}{0!}=e^{-4}$
X=1	$450.1-165.4=-210$	$p_1=e^{-4}.\frac{4^1}{1!}=4e^{-4}$
X=2	$450.2-165.4=240$	$p_2=e^{-4}.\frac{4^2}{2!}=8e^{-4}$
X=3	$450.3-165.4=690$	$p_3=e^{-4}.\frac{4^3}{3!}=\frac{32}{3}e^{-4}$
$X\ge 4$	$450.4-165.4=1140$	$p_4=1-\sum_{k=0}^{3}p_k=1-\frac{71}{3}e^{-4}$

Vậy: Số tiền lời trung bình thu được của trạm xe trong một ngày là

$$E(Y)=-660.e^{-4}-210.4e^{-4}+240.8e^{-4}+690.\frac{32}{3}e^{-4}+1140.(1-\frac{71}{3}e^{-4})\approx 788,340 \text{ (ngàn đồng).}$$

II. Phần Thống kê: (4 điểm)

Câu 5.

Mẫu khảo sát về trọng lượng của một loại trái cây (đơn vị: gram) trong vùng A năm nay được kết quả như sau

Trọng	[100;200]	(200;300]	(300;400]	(400;500]	(500;600]	(600;700]	(700;800]

lượng							
Số trái	5	45	150	48	36	13	3

Cho biết trọng lượng của trái cây loại này là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.
a. Hãy ước lượng trọng lượng trung bình của loại trái cây này với độ tin cậy 95%.
b. Nếu muốn ước lượng trọng lượng trung bình của một trái cây loại này đạt độ chính xác 10 gram và độ tin cậy 96% thì cần khảo sát thêm bao nhiêu trái cây nữa.
c. Những trái cây có trọng lượng lớn hơn 400 gram là xuất khẩu được. Hãy ước lượng tỉ lệ trái cây xuất khẩu được với độ tin cậy 95%.
d. Năm trước trọng lượng trung bình của trái cây loại này là 350 gram. Có ý kiến cho rằng trọng lượng trung bình của trái cây năm nay tăng hơn. Cho nhận xét về ý kiến đó với mức ý nghĩa 1%.
Giải.
a. Gọi μ (gram) là trọng lượng trung bình của loại trái cây này.

Ước lượng μ với độ tin cậy 95%:

Ta có các đặc trưng mẫu: $n = 300; \overline{x} = 388,6667; s = 112,3103$.

Với độ tin cậy $1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \varphi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0,475 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Độ chính xác của ước lượng μ là $\varepsilon = z_{\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{s}{\sqrt{n}} = 1,96.\dfrac{12,3103}{\sqrt{300}} = 12,7091$.

Khoảng tin cậy 95% cho μ là $\mu \in (\overline{x}-\varepsilon; \overline{x}+\varepsilon) = (375,96\,; 401,38)$ (gram).

b. Xét ước lượng trọng lượng trung bình của loại trái cây này.

Ta có các đặc trưng mẫu hiện thời: $n = 300; s = 112,3103$.

Với độ tin cậy $1-\alpha = 0,96 \Rightarrow \varphi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{1-\alpha}{2} = 0,48 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,06$.

Để đạt độ chính xác $\varepsilon_0 = 10$ gram cho ước lượng trên, thì

$$\varepsilon \le \varepsilon_0 \Leftrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\sqrt{n}} \le \varepsilon_0 \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow n \ge (z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\varepsilon_0})^2 \Leftrightarrow n \ge (z_{\frac{\alpha}{2}}.\frac{s}{\varepsilon_0})^2$$

$$\Leftrightarrow n \ge (2,06.\frac{112,3103}{10})^2 \Leftrightarrow n \ge 535,3 \Leftrightarrow n \ge 536.$$

Vậy: Cần phải khảo sát thêm 536-300=236 trái cây nữa.

c. Gọi p là tỉ lệ trái cây xuất khẩu được.

Ước lượng p với độ tin cậy 95%:

Ta có các đặc trưng mẫu: $n = 300; f = \dfrac{48+36+13+3}{300} = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$.

Với độ tin cậy $1-\alpha=0,95 \Rightarrow \varphi(z_{\frac{\alpha}{2}})=\dfrac{1-\alpha}{2}=0,475 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$.

Độ chính xác của ước lượng là $\varepsilon=z_{\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}=1,96.\dfrac{\sqrt{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}}{\sqrt{300}}=0,0533$.

Khoảng tin cậy 95% cho p là $p\in(f-\varepsilon;f+\varepsilon)=(0,28;0,3866)$.

d. Gọi μ (gram) là trọng lượng trung bình của loại trái cây này.

Xét cặp giả thuyết thống kê $H_0:\mu\le\mu_0, H_1:\mu>\mu_0$, với $\mu_0=350$.

Với mức ý nghĩa $\alpha=0,01 \Rightarrow \varphi(z_\alpha)=0,5-\alpha=0,49 \Rightarrow z_\alpha=2,33$.

Giá trị kiểm định $z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s}\sqrt{n}=\dfrac{388,6667-350}{112,3103}\sqrt{300}=5,96$.

$z\ge z_\alpha \Rightarrow$ Có cơ sở để bác bỏ giả thuyết H_0.

Vậy: Với mức ý nghĩa 1%, trọng lượng trung bình của trái cây năm nay tăng hơn năm trước.

III. Phần Quy hoạch: (3,5 điểm)

Câu 6. Một nhà đầu tư có 2 tỉ đồng, muốn đầu tư vào 4 lĩnh vực trong cùng một giai đoạn, bao gồm: chứng khoán, công trái, gửi tiết kiệm và bất động sản. Biết lãi suất hàng năm của các lĩnh vực đầu tư như sau:

Lĩnh vực đầu tư	Lãi suất hàng năm
Chứng khoán	14%
Công trái	12%
Gửi tiết kiệm	10%
Bất động sản	11%

Để giảm thiểu mức độ rủi ro, nhà đầu tư cho rằng không nên đầu tư vào chứng khoán vượt quá 40% tổng số tiền đầu tư, đầu tư vào công trái và gửi tiết kiệm phải ít nhất là 25% tổng vốn đầu tư, tiền gửi tiết kiệm phải ít nhất là 100 triệu đồng.

Hãy lập bài toán nhằm xác định kế hoạch phân bố vốn đầu tư sao cho tổng thu nhập hàng năm của nhà đầu tư là lớn nhất.

Giải.

Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 (triệu đồng) lần lượt là số tiền người này đầu tư vào các khoản: chứng khoán, công trái, gửi tiết kiệm và bất động sản.

Hàm mục tiêu là hàm tổng thu nhập hàng năm của nhà đầu tư là lớn nhất.

$$f(x)=0,14x_1+0,12x_2+0,1x_3+0,11x_4\to\max$$

Các ràng buộc chính như sau

Về tổng số tiền đầu tư: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2000$

Các điều kiện để giảm thiểu rủi ro: $x_1 \le 40\%.(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

$x_2 + x_3 \ge 25\%.(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

$x_3 \ge 100$

Các ràng buộc dấu

$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$.

Vậy: Mô hình bài toán là

$$f(x) = 0{,}14x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}11x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 2000 \\ -0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}4x_4 \ge 0 \\ 0{,}25x_1 - 0{,}75x_2 - 0{,}75x_3 + 0{,}25x_4 \le 0 \\ x_3 \ge 100 \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}$$

Câu 7. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính (P) như sau

$$f(x) = -7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \end{cases}.$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$$

a. Tìm phương án tối ưu của bài toán (P). Phương án tối ưu đó có duy nhất hay không?

b. Thiết lập bài toán đối ngẫu (D) của (P). Tìm phương án tối ưu của (D) nếu có.

Giải.

a. Bài toán tương ứng ở dạng chuẩn và đưa về dạng min là (Q)

$$g(x) = 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 + Mx_7 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = \overline{1,7}$, trong đó x_7 là biến giả.

Giải bài toán (Q) bằng thuật toán đơn hình ta được

Hệ số ACB	ACB	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			3	12	1	10	0	0	
0	X_4	6	2	3	1	1	0	0	6
0	X_5	8	1	2	2	0	1	0	4
M	X_7	4	2	1	**2**	0	0	-1	2
			-7	-2	**–3**	0	0	0	x_3 vào
		Δ_j	2M	M	**2M**	0	0	-M	x_7 ra
0	X_4	4	1	5/2	0	1	0	1/2	-
0	X_5	4	-1	1	0	0	1	1	-
3	X_3	2	1	1/2	1	0	0	-1/2	-
		Δ_j	-4	-1/2	0	0	0	-3/2	

Do $\Delta_j \leq 0, \forall j = \overline{1,7}$

Phương án tối ưu của bài toán (Q) là x=(0,0,2,4,4,0,0).

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là : g_{min} = 3.2=6.

Do ẩn giả duy nhất $x_7 = 0$, nên bài toán gốc (P) có phương án tối ưu là x=(0,0,2).

Giá trị hàm mục tiêu đạt được là : f_{max}= –g_{min}= –6.

Dựa vào bảng đơn hình cuối cùng ta thấy $\Delta_j = 0 \Leftrightarrow x_j$ là ẩn cơ bản. Vì vậy phương án tối ưu tìm được là duy nhất.

b. Bài toán đối ngẫu (D) là

$$g(y) = 6y_1 + 8y_2 + 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq -7 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -2 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0$$

Ta có x=(0,0,2) là phương án tối ưu của (P). Gọi $y = (y_1, y_2, y_3)$ là phương án tối ưu của bài toán (D).

Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có:

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 < 6\,(\text{lỏng}) \to y_1 = 0$ (1)

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 < 8\,(\text{lỏng}) \to y_2 = 0$ (2)

$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4\,(\text{chặt}) \to y_3 \le 0$ (3)

$x_1 = 0\,(\text{chặt}) \to 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge -7$ (4)

$x_2 = 0\,(\text{chặt}) \to 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge -2$ (5)

$x_3 = 2 > 0\,(\text{lỏng}) \to y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -3$ (6)

Giải hệ phương trình (1), (2) và (6) ta được

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy: Bài toán (D) có phương án tối ưu duy nhất là $y = (0, 0, -\frac{3}{2})$.

Cho biết:

Hàm Laplace $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ có

$\varphi(1,96) = 0,475; \varphi(2,06) = 0,48; \varphi(2,33) = 0,49; \varphi(1,65) = 0,45; \varphi(2,58) = 0,495$